Musterlösung zu Blatt 9

Daniel Max, Jamal Drewlo, Stefan Engelhardt, Prof. Michael Neumann

EWMS WiSe 2020/21

Aufgabe 29

(i) Die Verteilungsfunktion $\Phi(x)$ der Standardnormalverteilung ist gegeben durch

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \,\mathrm{dt}.$$

Damit erhalten wir für $x > 0$

$$F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(e^X \leq x) = P(X \leq \ln(x)) = \Phi(\ln(x)).$$

Für $x \leq 0$ ist $F_Y(x) = 0$ (klar: e^X nimmt nur positive Werte an und $\ln(x)$ ist nur für $x > 0$ definiert).

(ii) Da F_Y stetig und überall stetig differenzierbar ist, folgt aus Lemma 7.8, dass $g(x) = F_Y^{'}(x) \cdot \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte zu F_Y ist. Sei

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \ , \ -\infty < x < \infty,$$

die Dichte der Standardnormalverteilung. Differentiation (Kettenregel) liefert aufgrund von $\Phi' = \varphi$

$$\begin{aligned} g(x) &= \varphi(\ln(x)) \cdot \ln(x)' \\ &= \varphi(\ln(x)) \cdot \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{\ln(x)^2}{2}} \end{aligned}$$

für $x > 0$ und $g(x) = 0$, sonst. Die Dichte von Y ist also gegeben durch

$$\frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{\ln(x)^2}{2}} \cdot \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x).$$

Aufgabe 30

Ist $X \sim \text{Exp}_\lambda$, dann gilt $E[X] = \frac{1}{\lambda}$. Die Rechnung dazu findet sich in jedem Stochastik-Lehrbuch sowie in unzähligen im Netz frei verfügbaren Skripten und ist daher an dieser Stelle nicht noch einmal aufgeführt.

Aufgabe 31

Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Setze $Y := \epsilon \cdot \mathbf{1}_{\{|X| \geq \epsilon\}}$, so ist $Y \leq |X|$ und

$$E[Y] = \epsilon \cdot P(|X| \geq \epsilon) \leq E[|X|]$$

nach Lemma 5.8(i). Umstellen liefert die Behauptung.

Alternativ direkt über die Dichte p: Mit der gleichen Herangehensweise wie in Satz 5.19 der Vorlesung gilt

$$\begin{aligned}
P(|X| \geq \epsilon) &= \int_\epsilon^\infty p(t)\ \mathrm{dt} + \int_{-\infty}^{-\epsilon} p(t)\ \mathrm{dt} \\
&\leq \int_\epsilon^\infty \frac{|t|}{\epsilon} p(t)\ \mathrm{dt} + \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{|t|}{\epsilon} p(t)\ \mathrm{dt} \\
&= \frac{1}{\epsilon} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |t| p(t)\ \mathrm{dt} - \int_{-\epsilon}^{\epsilon} |t| p(t)\ \mathrm{dt} \right) \\
&\leq \frac{1}{\epsilon} \cdot E[|X|].
\end{aligned}$$

Aufgabe 32

Für ein festes $k \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\begin{aligned}
P(X_n = k) &= \binom{n}{k} \left(\frac{p}{n}\right)^k \left(1 - \frac{p}{n}\right)^{n-k} \\
&= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k! n^k} p^k \left(1 - \frac{p}{n}\right)^n . \\
&\to \frac{1}{k!} p^k e^{-p}
\end{aligned}$$

für $n \to \infty$, also

$$\text{Bin}_{n, \frac{p}{n}}(\{k\}) \stackrel{n \to \infty}{\longrightarrow} \text{Poi}_p(\{k\}).$$